

Gewöhnliche Differentialgleichungen NWI: Präsenzübung 5
-Sophiane Yahiatene-

Aufgabe 1 Seien $J, Q \subseteq \mathbb{R}$ zwei Intervalle und seien $f_1, f_2 : J \times Q \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz-beschränkt in $J \times Q$ (bezüglich der zweiten Variable) mit Lipschitzkonstanten $L_1, L_2 \geq 0$. Zeige, dass die Funktionen $g_i : J \times Q \rightarrow \mathbb{R}$ mit

1. $g_1(t, v) = \alpha f_1(t, v) + \beta f_2(t, v)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und
2. $g_2(t, v) = |f_1(t, v)|$.

Lipschitz-beschränkt in $J \times Q$ (bezüglich der zweiten Variable) sind und bestimme eine Lipschitzkonste.

Aufgabe 2 Zeige, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(v) := \begin{cases} 1 - \cos(v) & v < 0 \\ v & v \geq 0 \end{cases}$$

Lipschitz-beschränkt auf \mathbb{R} ist und bestimme eine geeignete Lipschitzkonstante.

Aufgabe 3 Betrachte die Anfangswertaufgabe

$$u'(t) = u(t) - t^2, u(0) = 1$$

1. Besitzt die Anfangswertaufgabe für $\Omega = J \times \mathbb{R}$, $J = [-a, a]$, $a > 0$ eine eindeutige Lösung?
2. Sei nun $a = 2$. Gebe den kleinsten Index K an, ab dem die K -te Picard-Iterierte v_K die Lösung u der Anfangswertaufgabe bis auf einen Fehler von 10^{-2} für alle $t \in J$ approximiert.